I - SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

A. Présentation

1. Notions de systèmes dynamiques et perturbations.

On appelle système dynamique un système dont l'étude ne peut être réalisée qu'en prenant en compte les valeurs passées du phénomène. Les grandeurs de sortie dépendent des valeurs présentes et passées des grandeurs d'entrées. Les phénomènes d'inertie (inertie mécanique, inertie thermique...) influent sur le comportement du système.
Nous limiterons notre étude aux seuls systèmes linéaires continus et invariants.

2. Systèmes linéaires continus et invariants.

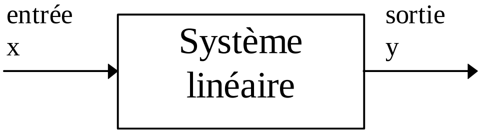
a) Systèmes linéaires

(1) Définition

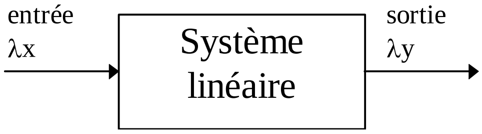
Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants. Les systèmes linéaires se caractérisent principalement par deux propriétés, la **proportionnalité** et **l'additivité**.

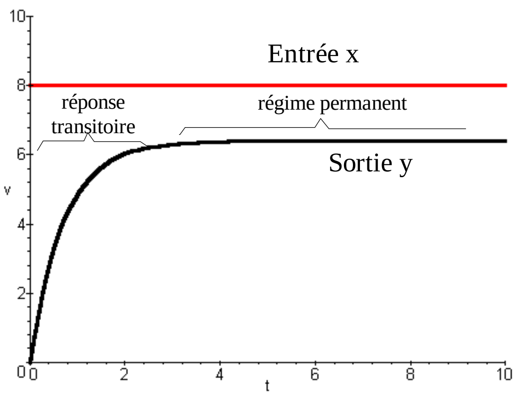
(2) Principe de proportionnalité

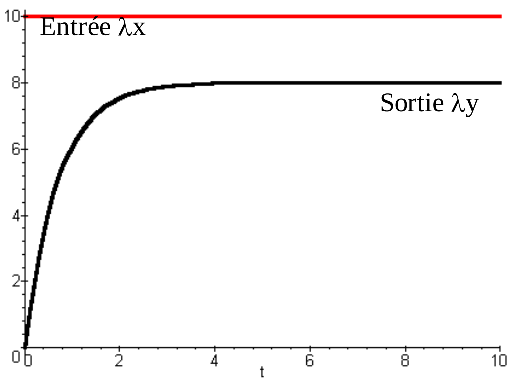
L'effet est proportionnel à la cause
Si **y** est la réponse à l'entrée **x**



, alors **λy** est la réponse à **λ.x**.

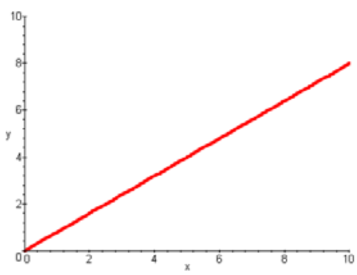




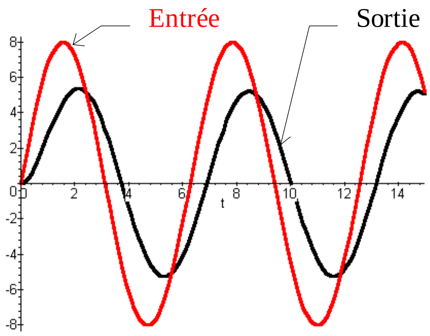


Remarque: L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.

La caractéristique Entrée/Sortie d'un système linéaire est une droite dont la pente $\frac{Y}{X}$ est appelé gain du système.

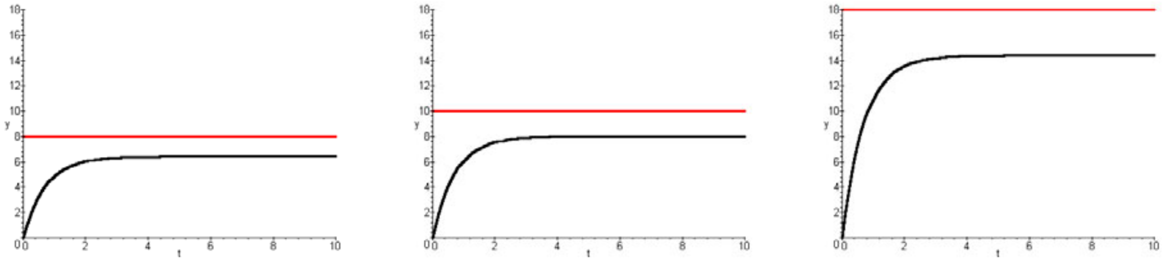


La réponse, en régime définitif, d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée.



(3) Principe d'additivité ou de superposition:

Si **y1** est la réponse à **x1**, si **y2** est la réponse à **x2**, alors la réponse à **x1+x2** est **y=y1+y2**.

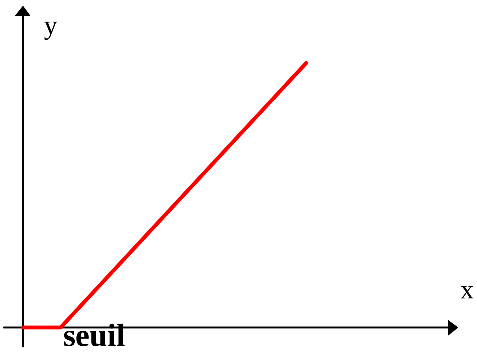


Le principe de superposition est important car il va nous permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par **additivité** et **proportionnalité** la réponse à des sollicitations plus complexes.

(4) Principales non - linéarités

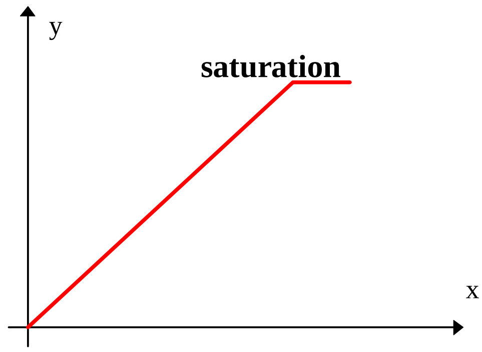
Seuil

Un système présente un seuil lorsque la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse un seuil mini.
Un grand nombre de système présente un seuil de fonctionnement, ces seuils ont souvent pour origine des frottements secs.



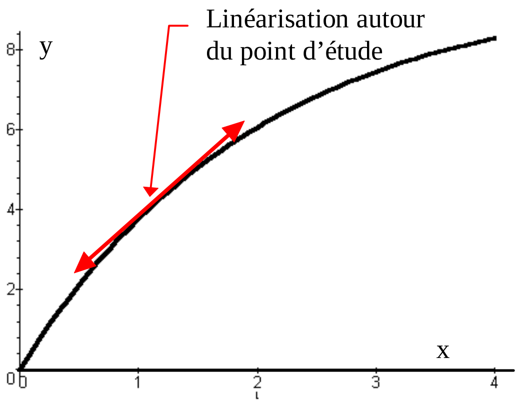
Saturation

Un système présente un saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite.
Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit à des limites des interfaces de puissance (saturation des ampli-Op).



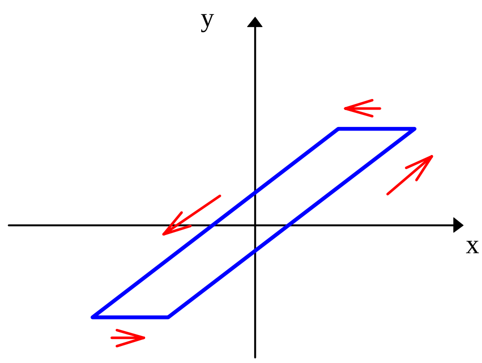
Courbure

La quasi totalité des système présente des courbure plus ou moins prononcé.
Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de **linéariser** autour d'un point de fonctionnement.



Hystérisis

Un système présente une réponse en hystérisis lorsque le comportement en « montée » est différent de celui en « descente ».
par exemple: cycle de magnétisation.



b) Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les variations des grandeurs physiques le caractérisant sont des fonctions du type f(t) avec t une variable continue (en général le temps).On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets, par exemple les systèmes informatiques.

c) Système invariant

On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps.

Remarques: En fait, si les systèmes physiques sont, à une échelle macroscopique, continus (du point de vue microscopique cette hypothèse n'est pas vraie (saut des électrons d'une couche à une autre)) Il ne sont ni invariants (vieillissement, usure), ni linéaires. Il est toujours possible de modéliser correctement le système pour que le système puisse être considéré comme linéaire, continu et invariant dans la zone d'étude.

La linéarisation autour du point d'étude en prenant la tangente à la caractéristique au point d'étude permet en général une bonne approximation du comportement du système pour de faible variation autour de ce point.

B. Représentation des systèmes linéaires

Pour réaliser une commande automatique, il est nécessaire d'établir les relations existant entre les entrées (variables de commande) et les sorties (variables d'observation). L'ensemble de ces relations s'appelle "modèle mathématiques" du système

1. Schéma physique

Une des représentations qui va nous permettre d'analyser un système est bien sur sont schéma physique (schéma électrique, mécanique, électronique,...)

Ce type de schéma utilise la normalisation de chaque technologie

Schéma électrique - circuit RC

Le circuit se compose d'une résistance ® et d'un condensateur en série

Le circuit est alimenté par la tension d'entrée u_e.

La sortie est la tension aux bornes du condensateur u_s.

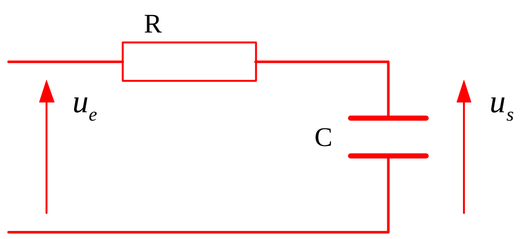
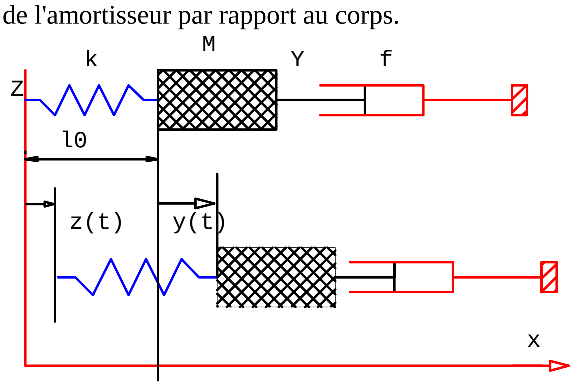


Schéma mécanique - Masse Ressort amortisseur

Le système se compose d'un ressort, d'une masse M et d'un amortisseur en série.

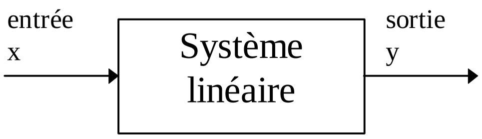
Le ressort de raideur k a un fonctionnement symétrique (même comportement à la traction et la compression), $F_R = -k(l - l_i)$ effort développé par le ressort avec l_i longueur initiale.

L'amortisseur a pour coefficient d'amortissement f; $F_V = -f.v$ effort développé s'opposant au déplacement avec v vitesse de déplacement de la tige de l'amortisseur par rapport au corps.



2. Représentation par les équations différentielles.

Un système dynamique linéaire peut être représenté par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.



L'équation générale d'un système linéaire est de la forme

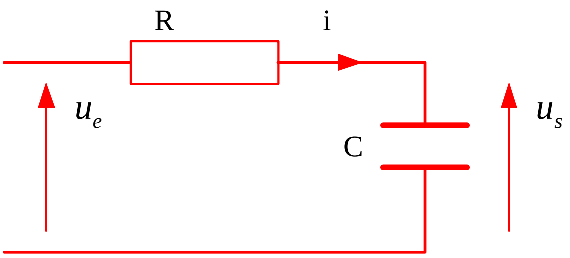
$$b_m \frac{dy^m}{dt^m} + b_{m-1}\frac{dy^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_2\frac{dy^2}{dt^2} + b_1\frac{dy^1}{dt^1} + b_0 \cdot y = a_n\frac{dx^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2\frac{dx^2}{dt^2} + a_1\frac{dx^1}{dt^1} + a_0 \cdot x$$

dans le cas des systèmes réels $m \geq n$.
Nous ne savons résoudre dans le cas général que les équations différentielles du premier et du second ordre et dans quelques cas particuliers des équations d'ordre supérieur.
Le problème de l'automatisation est plus complexe que la résolution puisqu'il s'agit de déterminer la loi d'entrée x qui permet d'obtenir la sortie désirée y.
La représentation par l'équation différentielle nécessite pour connaître la réponse à une entrée de résoudre l'équation!

a) Principe de la résolution

La solution d'une équation différentielle est la somme d'une solution générale et de la solution particulière.
La solution générale représente la composante transitoire, la solution particulière représente la composante permanente.
La solution générale est déterminé par la résolution de l'équation sans second membre:
La solution particulière est déterminée en fonction de la forme de x(t).

(a) exemple circuit RC



En utilisant la loi des mailles on obtient:

$$u_e(t) - u_s(t) = R.i(t)$$

$$i = C\frac{du_s}{dt}$$

d'où l'équation différentielle en substituant i dans la première équation

$$u_e(t) - u_s(t) = R.C \cdot \frac{du_s}{dt}$$

$$u_e(t) = R.C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s(t)$$

La solution générale est solution de l'équation suivante

$$R.C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s(t) = 0$$

La solution est de la forme $s_g(t) = K.e^{at}$
par identification, on détermine le coefficient « a »

$$a = -\frac{1}{R \cdot C} = -\frac{1}{\tau}.$$

Le coefficient K sera déterminé en fonction des conditions initiales.

La solution particulière dans le cas où $u_e(t) = U_0$ est solution de l'équation ci dessous

$$R.C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s(t) = U_0$$

La solution particulière est de la même forme que l'entrée
ici $s_p(t) = U_0$

La solution complète est la somme des deux solutions : $u_s(t) = s_g(t) + s_p(t) = K.e^{-\frac{t}{RC}} + U_0$
La dernière constante est déterminée en fonction des conditions initiales (on suppose ici que le condensateur est complètement déchargé).

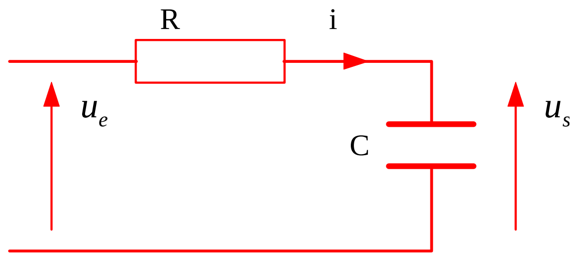
$$u_s(t=0) = 0 \Rightarrow K = -U_0$$

d'où $u_s(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

3. Représentation par la transformée de Laplace

Voir Annexe **Transformation de Laplace**.
L'utilisation de la transformée de Laplace permet de ramener la résolution d'une équation différentielle a une manipulation algébrique.

(a) Exemple - circuit RC(suite 1)



Le comportement de chaque constituant est décrit par les équations suivantes

$$u_e(t) - u_s(t) = R.i(t)$$

$$i = C\frac{du_s}{dt}$$

Passons dans le domaine symbolique

On pose $L[u_s(t)] = U_s(p)$, $L[u_e(t)] = U_e(p)$, $L[i(t)] = I(p)$

nous savons que

La dérivée première d'une fonction temporelle est

$$\mathrm{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p\cdot F(p) - f(0^+)$$

si $L[f(t)] = F(p)$

de même pour la dérivée seconde

$$\mathrm{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2\cdot F(p) - pf(0^+) - \dot{f}(0^+)$$

Nous supposons que les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside).

$$u_e(t) - u_s(t) = R.i(t) \quad \Rightarrow U_e(p) - U_s(p) = R\cdot I(p)$$

$$i = C\frac{du_s}{dt} \quad \Rightarrow I(p) = C\cdot p\cdot U_s(p)$$

en substituant I(p), on obtient:

$$U_e(p) - U_s(p) = R\cdot C\cdot U_s(p) \qquad \Rightarrow U_s(p) = \frac{1}{1+\tau\cdot p}\cdot U_e(p)$$

On prend pour l'entrée $u_e(t) = U_0$, donc dans le domaine symbolique $U_e(p) = \dfrac{U_0}{p}$

$$U_s(p) = \frac{1}{1+\tau\cdot p}\cdot\frac{U_0}{p}$$

Décomposition en éléments simples

$$U_s(p) = \frac{1}{1+\tau\cdot p}\cdot\frac{U_0}{p} = U_0\left(\frac{A}{1+\tau\cdot p} + \frac{B}{p}\right) \quad \Rightarrow U_s(p) = U_0\left(\frac{A\cdot p + B\cdot(1+\tau\cdot p)}{(1+\tau\cdot p)p}\right)$$

On déduit donc $B = 1$ $\qquad A = -\tau$

la décomposition s'écrit $U_s(p) = U_0\left(\dfrac{-\tau}{1+\tau\cdot p} + \dfrac{1}{p}\right)$

Transformation inverse

On reconnaît deux formes particulières dans le tableau des transformées (Cf annexe Transformation de Laplace).

$f(t).u(t)$	$F(p) = \mathrm{L}\;[f(t)]$
K	$\dfrac{K}{p}$
$e^{-a.t}$	$\dfrac{1}{p+a}$

d'où la solution complète

$$u_s(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Remarque: cette méthode est lourde pour un exemple aussi simple mais en général nous n'auront pas à résoudre mais plutôt à caractériser la solution d'après la forme de la transformée

La transformée de Laplace ne permet de résoudre plus de forme d'équations différentielles, mais c'est une méthode alternative pour résoudre un problème.

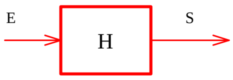
4. Représentation par le schéma fonctionnel - Fonction de transfert

a) Schéma fonctionnel (schéma bloc)

La représentation par le schéma fonctionnel permet de représenter de manière graphique un système linéaire. Chaque bloc du schéma caractérise une des fonctions du système, l'allure globale du schéma renseigne aussi sur sa structure (boucle ouverte, boucle fermée).
Les équations différentielles du comportement sont traduites par la fonction de transfert de chaque constituant.
Le système d'équations est remplacé par un ensemble de blocs représentant les fonctions du système. les branches entre les blocs portent les variables intermédiaires globales du système.
La détermination des fonctions de transfert sera vue plus loin.

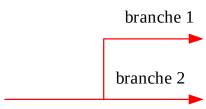
(1) Formalisme

(a) Bloc



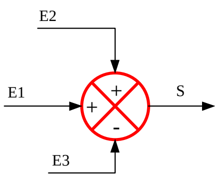
Le bloc possède une entrée et une sortie
H est la fonction de transfert du bloc est déterminée d'après les équations de fonctionnement.
S=H.E

(b) Jonction



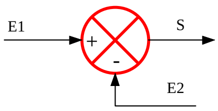
La variable de la branche 1 est identique à celle de la branche 2, un prélèvement d'information ne modifie pas la variable

(c) Sommateur



Les sommateurs permettent d'additionner et soustraire des variables, il possèdent plusieurs entrées mais une seule sortie. Ici
S=E1+E2-E3

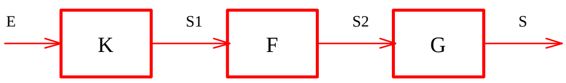
(d) Comparateur



Cas particulier de sommateur qui permet de faire la différence de deux entrées (de comparer) ici :
S=E1-E2

(2) Manipulation des schémas blocs

(a) Produit



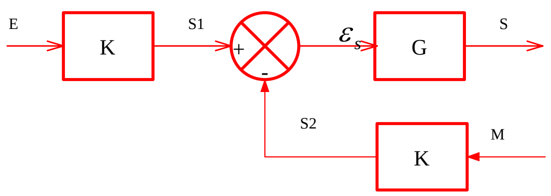
S1=K.E S2=F.S1 S=G.S2

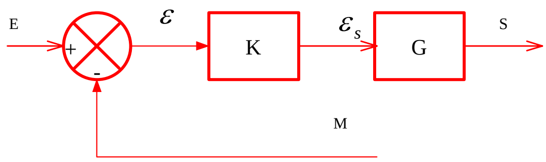
S=K.F.G.E
S=H.E
avec H=K.F.G

Il est possible de remplacer des blocs en ligne par le bloc produit des fonctions de chaque bloc.

(b) Déplacement d'une sommation

Les schémas ci-dessous sont équivalents





S1=K.E et S2=K.M

$\varepsilon_s = S_1 - S_2 \qquad S = G \cdot \varepsilon_s$

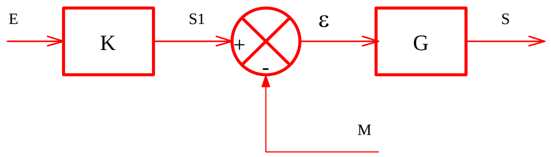
$S = K \cdot G \cdot (E - M)$

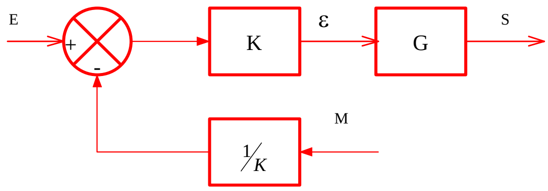
$\varepsilon = E - M$

$\varepsilon_s = K \cdot \varepsilon \qquad S = G \cdot \varepsilon_s$

$S = K \cdot G \cdot (E - M)$

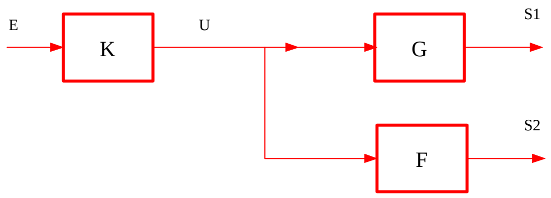
De le transformation ci-dessus on peut déduire la transformation suivante.

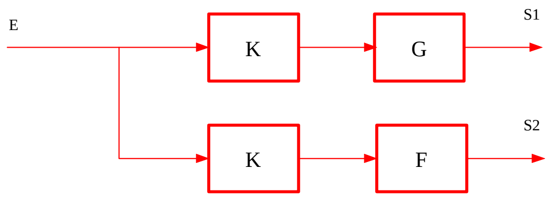




Ces deux schémas sont bien sur équivalent, mais il faut bien se rendre compte que la fonction de transfert $\boxed{1/K}$ n'a pas de sens physique mais seulement une signification symbolique.

(c) *Déplacement d'une jonction*



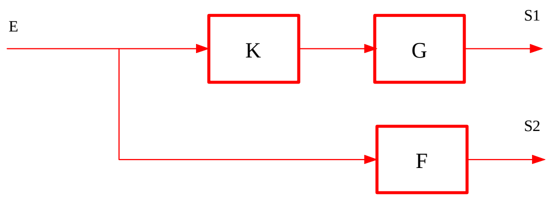


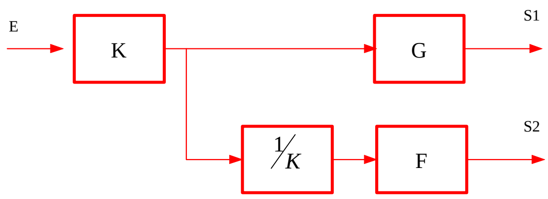
U=K.E

S1=K.G.E et S2=K.F.E

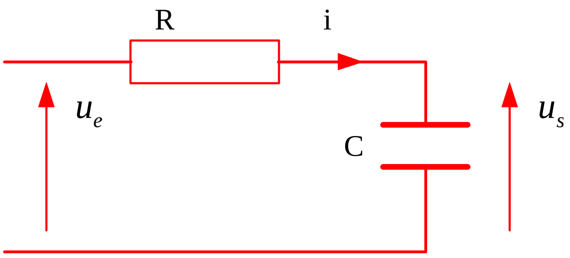
S1=K.G.E et S2=K.F.E

De la transformation précédente on déduit la modification du schéma ci-dessous, avec la même remarque pour $\boxed{1/K}$.





(d) *Exemple - circuit RC(suite)*



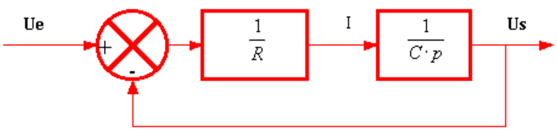
Le comportement de chaque constituant est décrit par les équations suivantes

$u_e(t) - u_s(t) = R.i(t)$, $i = C\dfrac{du_s}{dt}$

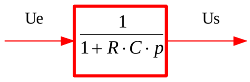
dans le domaine symbolique (avec les conventions précédentes)

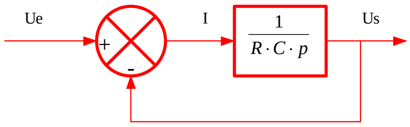
$U_e(p) - U_s(p) = R \cdot I(p)$

$I(p) = C \cdot p \cdot U_s(p)$



Ce schéma est bien sur équivalent au schéma ci dessous





Le dernier Bloc contient la fonction de transfert du système linéaire .

(3) Fonction de transfert - transmittance

Un système linéaire continu invariant est décrit par une équation différentielle de la forme :

$$b_m \frac{dy^m}{dt^m} + b_{m-1}\frac{dy^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + b_2\frac{dy^2}{dt^2} + b_1\frac{dy^1}{dt^1} + b_0 \cdot y = a_n\frac{dx^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_2\frac{dx^2}{dt^2} + a_1\frac{dx^1}{dt^1} + a_0 \cdot x$$ si

on suppose les conditions initiales nulles (conditions de Heaviside.

Les transformées respectives de l'entrée et de la sortie sont

:

$$x(t) \xrightarrow{L} X(p)$$

$$y(t) \xrightarrow{L} Y(p)$$

on rappelle que $\mathrm{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0^+)$

d'ou en appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité les conditions initiales étant nulles.

$$b_m \cdot p^m \cdot Y(p) + b_{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot Y(p) + \dots + b_1 \cdot p \cdot Y(p) + b_0 \cdot Y(p) = a_n \cdot p^n \cdot X(p) + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot X(p) + \dots + a_1 \cdot p \cdot X(p) + a_0 \cdot X(p)$$

$$\left(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot Y(p) = \left(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0\right) \cdot X(p)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}$$

$H(p) = \dfrac{Y(p)}{X(p)}$ est la fonction de transfert ou transmittance du système:

La représentation par le schéma fonctionnel et la fonction de transfert permettent de déterminer les caractéristiques principales du système sans résoudre l'équation différentielle.

Ces représentations sont la base de l'automatique.

La représentation par schéma bloc est déduite de la représentation par la transformée de Laplace.

La fonction de transfert globale peut être déterminée a partir du schéma ou de la représentation par Laplace.

5. Etude des systèmes dynamiques - Signaux canoniques d'entrées.

Afin d'analyse le comportement d'un système dynamique, on le soumet à des entrées typiques permettant l'analyse de la sortie.

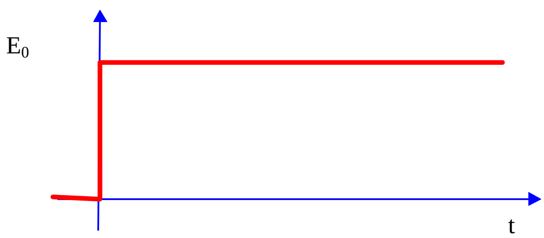
a) signal en échelon

La fonction échelon permet de soumettre le système à une entrée constante depuis t=0

Ce signal est le principal signal d'étude des systèmes linéaires.

La réponse des systèmes linéaires du premier et du deuxième ordre à ce signal est parfaitement connue et caractéristique du système.

Cf. étude temporelle des systèmes linéaires



$e(t) = E_0 \cdot u(t)$

$u(t)$: fonction de Heaviside ,

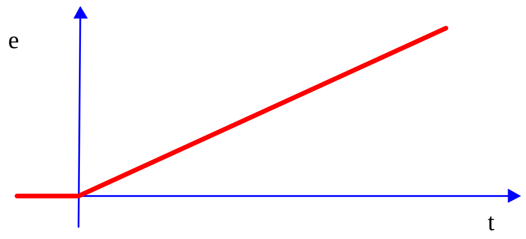
cette fonction est telle que :

pour t<0 $u(t) = 0$
pour t>=0 $u(t) = 1$

b) signal rampe

Ce signal est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite.

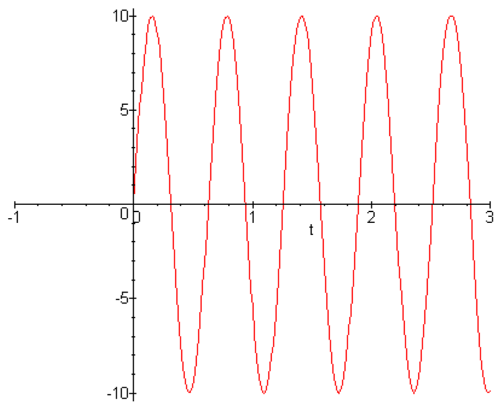
$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$$



c) signal sinusoïdal

Ce signal est le signal de base de l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, c'est à dire la réponse en fréquence du système.

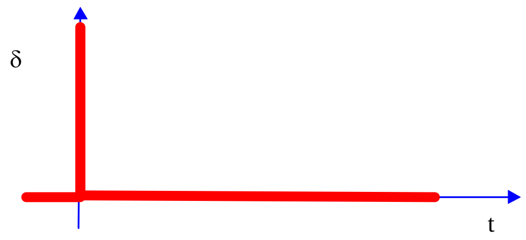
$$e(t) = K \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$$



d) Impulsion de Dirac

Cette fonction impossible à réaliser matériellement permet de simuler l'effet d'une action s'exerçant durant un temps très bref (choc; impulsion).

$$\forall t \neq 0,\ \delta(t) = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1$$



Dirac, 9
échelon, 9
équations différentielles, 3
Heaviside, 9
schéma bloc), 6
Schéma fonctionnel, 6
Signaux canoniques, 8
Système invariant, 3
Systèmes linéaires, 1
transformée de Laplace, 4